

Varianta 84

SUBIECTUL I

- a) $\bar{z} = 4 + 3i$.
- b) $AC = \sqrt{2}$.
- c) $S = 25$.
- d) $a = 1$ și $b = -1$.
- e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.
- f) $P = 6 + 3\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x_1 + x_2 = 2$.
- b) $C_8^3 - C_8^5 + C_8^8 = 1$.
- c) $x = 5$.
- d) $x = \frac{5}{4}$.
- e) $p = \frac{2}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = 5x^4 + 2$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.
- d) $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^5} = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $f_1(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ este singura soluție reală.
- b) $(x-1)^3 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = f_1(x)$.
- c) $f_2(x) = f_1(f_1(x)) \stackrel{b)}{=} ((x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^{3^2} + 1$.
- d) Pentru $n=1$ relația este adevărată din **b**). Presupunem adevărat că $f_k(x) = (x-1)^{3^k} + 1$ și demonstrăm că $f_{k+1}(x) = (x-1)^{3^{k+1}} + 1$.

Dar $f_{k+1}(x) = f_k(f_1(x)) = f_k((x-1)^3 + 1) = ((x-1)^3 + 1)^{P(k)} + 1 = (x-1)^{3^{k+1}} + 1$.

Folosind metoda inducției matematice $\Rightarrow f_n(x) = (x-1)^{3^n} + 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- e) $f'_n(x) = 3^n(x-1)^{3^n-1} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deoarece $3^n - 1$ este număr par.
- f) Observăm că $x=1$ este soluție. Dacă $x > 1 \xRightarrow{e)} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) > 3$. Analog dacă $x < 1 \xRightarrow{e)} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) < 3$. Deci $x=1$ este soluție unică.
- g) Din d) $\Rightarrow f_k(1) = 1, \forall k \in \mathbf{N}^*$. Atunci $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{2007}(1) = 2007$.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = e^x - 1$.
- b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f'(x) \leq 0, \forall x \leq 0$ și $f'(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$.
- c) Folosind b) rezultă că $x=0$ este punct de minim global $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$. Căutăm asimptotă oblică: $y = mx + n$, unde $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1$ și $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = -x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx = e - \frac{3}{2}$.
- f) Din c) $f(x) \geq 1, f(x^2) \geq 1$ și $f(x^3) \geq 1, \forall x \in \mathbf{R}$ cu egalitate pentru $x=0 \Rightarrow$ Ecuația admite soluția unică $x=0$.
- g) $f(-1) + f(-2) + \dots + f(-n) = e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n} + 1 + 2 + \dots + n = \frac{(e^{-1})^n - 1}{e^{-1} - 1} + \frac{n(n+1)}{2}$. De unde limita cerută este $\frac{1}{2}$.